5/3/19

Συνέχεια συναρτήσεων

Ορισμός: Έστω (X,ρ), (Y,d) δύο μετρικοί χώροι $f: X \to Y$ και $x_0 \in X$. Η f λέγεται συνεχής στο x_0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\forall x \in X$ αν $\rho(x, x_0) < \delta$ τότε $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
Η f λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in X$

Παρατήρηση: Το δ εξαρτάται από τα x_0 και ε

Παραδείγματα: α) $f: (X,\rho) \to (Y,d)$ και $y_0 \in Y$ ώστε $f(x) = y_0$ $\forall x \in X$ [σταθερή συνάρτηση με τιμή y_0]

Προφανώς η f είναι συνεχής

β) $f: (X,\rho) \to (X,\rho)$ με $f(x) = x$ [ταυτοτική συνάρτηση]
Έστω $x_0 \in X$ $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $\delta = \varepsilon$ κ.ο.κ.

γ) Έστω (X,ρ) ο διακριτός μετρικός χώρος $\left(\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}\right)$ (Y,d) τυχαίος μετρικός χώρος και $f: X \to Y$ μια συνάρτηση.
Η f είναι συνεχής.
Αποδ: Έστω $x_0 \in X$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $\delta = 1$ (ή οποιοδήποτε δ με $0 < \delta \leq 1$). Τότε για κάθε $x \in X$ με $\rho(x, x_0) < \delta \leq 1$ έχουμε $x = x_0$ και άρα:
$d(f(x), f(x_0)) = d(f(x_0), f(x_0)) = 0 < \varepsilon$

Άρα η f είναι συνεχής στο x_0. Εφόσον η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της είναι συνεχής.

(X,ρ) μ.χ , (Y,d) μ.χ , $x_0 \in X$ $f: X \to Y$

f συνεχής $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \rho(x,x_0)<\delta \Rightarrow d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad$ $\Updownarrow$

$x \in B_\rho(x_0,\delta)$ $\qquad$ $f(x) \in B_d(f(x_0),\varepsilon)$

Ορ. συνέχειας με μπάλες

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : f(B_\rho(x_0,\delta)) \subseteq B_d(f(x_0),\varepsilon)$

▷ Άρνηση του ορισμού της συνέχειας

$f(X,\rho) \to (Y,d)$ $x_0 \in X$. Η f δεν είναι συνεχής στο x_0 $\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists x \in X$ με $\rho(x,x_0)<\delta$ και $d(f(x),f(x_0)) \geq \varepsilon$

Θεώρημα: (Αρχή μεταφοράς συγκλινουσών ακολουθιών)

Έστω (X,ρ), (Y,d) δυο μ.χ., $f(X,\rho) \to (Y,d)$ $x_0 \in I$ Τ.Α.Ε.Ι.

i) Η f είναι συνεχής στο x_0

ii) Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X αν $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ τότε $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x_0)$

Απόδειξη: ((i) $\Rightarrow$ (ii)) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο X ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$. Θα δείξουμε ότι: $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x_0)$

Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο x_0 υπάρχει $\delta>0$ ώστε: $\forall x \in X$ $\boxed{\text{αν } \rho(x,x_0)<\delta \text{ τότε } d(f(x),f(x_0))<\varepsilon}$ (*) Εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$ να ισχύει: $\rho(x_n,x_0)<\delta$ και άρα από (*) $d(f(x_n),f(x_0))<\varepsilon$

Επομένως, $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x_0)$

((ii) ⇒ (i)) Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0.
Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\boxed{\text{για κάθε } \delta > 0 \text{ υπάρχει } x\ (= x(\delta)) \text{ με } \rho(x, x_0) < \delta \text{ και } d(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon}$ (**)

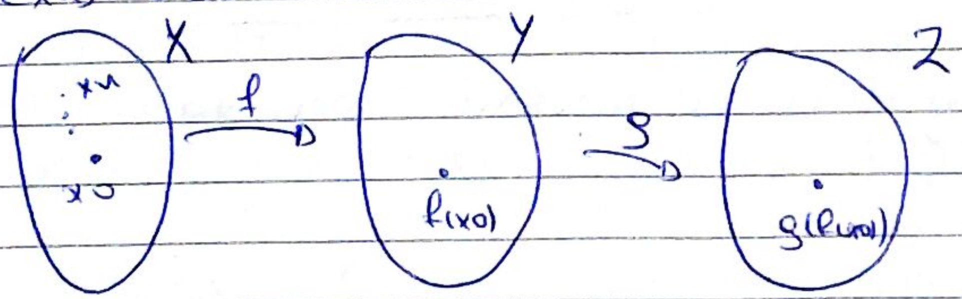
Εφαρμόζοντας την (**) για $\delta = \frac{1}{n}$ βρίσκουμε

$x_n \in X$ με $\rho(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ και $d(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$

Τότε $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ ενώ δεν ισχύει $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x_0)$
(αφού $d(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$) Άτοπο

Επομένως, η f είναι συνεχής στο x_0

Πρόταση: Έστω (X, ρ), (Y, d), (Z, σ) $x_0 \in X$ και
$f : (X, \rho) \to (Y, d)$
$g : (Y, d) \to (Z, \sigma)$, τότε f συνεχής στο x_0 και η g συνεχής στο $f(x_0)$. Τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.



→

Απόδειξη: 1ος τρόπος Με χρήση της αρχής μεταφοράς

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο X με $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$.
Εφόσον η f είναι συνεχής στο x_0 από αρχή μεταφοράς: $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x_0)$
Εφόσον η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, από αρχή μεταφοράς: $g(f(x_n)) \xrightarrow{\sigma} g(f(x_0))$

δηλ. $(g\circ f)(x_n) \xrightarrow{\sigma} (g\circ f)(x_0)$

Επομένως, (από αρχή μεταφοράς (ii ⇒ i)), συμπεραίνουμε ότι η $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

2ος τρόπος Με τον ορισμό της συνέχειας

Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ υπάρχει $\eta>0$ ώστε για κάθε $y\in Y$ αν $d(y, f(x_0))<\eta$ τότε: $\sigma(g(y), g(f(x_0)))<\varepsilon$ (1)

Εφόσον, η f είναι συνεχής στο x_0 υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $x\in X$ αν $\rho(x,x_0)<\delta$ τότε: $d(f(x), f(x_0))<\eta$ και άρα:

$$\sigma(g(f(x)), g(f(x_0)))<\varepsilon$$

Επομένως, η $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0

Πρόταση: Αν $f, g : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ (όπου στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε τη συνήθη μετρική) είναι δύο συναρτήσεις, συνεχείς στο $x_0 \in X$, τότε οι $f+g$, $f \cdot g$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο x_0.
Αν $g(x) \neq 0$ $\forall x \in X$ (οπότε ορίζεται η $\frac{f}{g}$) τότε

και η $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής.

Ορισμός: Έστω (X, ρ), (Y, d) δύο μ.χ. $f : X \to Y$
λέμε ότι η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με σταθερά C (όπου $C > 0$) αν ισχύει:
$d(f(x), f(y)) \leq C \rho(x, y)$ $\forall x, y \in X$

(Λέμε απλά ότι η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz αν $\exists C > 0$ ώστε ...)

Παρατήρηση: Κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz είναι συνεχής
(Έστω $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ θέτουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ ...)

Ορισμός: Έστω (X, ρ), (Y, d) δύο μ.χ $f : X \to Y$
Η f λέγεται ομοιόμορφα συνεχής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in X$ αν $\rho(x, y) < \delta$ τότε $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$

f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz $\Rightarrow$ f ομ. συνεχής $\Rightarrow$ f συνεχής

Οι αντίστροφες συνεπαγωγές, γενικά, δεν ισχύουν.

Έστω $\varepsilon > 0$ θέτω $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μ.χ.
α) Αν $x_0 \in X$ και ορίσουμε τη συνάρτηση $f:(X,\rho) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \rho(x,x_0)$. Τότε η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με σταθερά 1 άρα είναι ομ. συνεχής και συνεχής.
β) Αν $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ και ορίσουμε τη συνάρτηση $f:(X,\rho) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \rho(x,A)$ $[= \inf\{\rho(x,y) : y \in A\}]$ Τότε η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με σταθερά 1 άρα είναι ομ. συνεχής και συνεχής.

Απόδειξη: α) Για κάθε $x,y \in X$.

$$|\rho(x,x_0) - \rho(y,x_0)| \leq \rho(x,y)$$
$$|f(x) - f(y)| \leq 1 \cdot \rho(x,y)$$

β) Για κάθε $x,y \in A$ ισχύει:

$$|\rho(x,A) - \rho(y,A)| \leq \rho(x,y)$$

$$|f(x) - f(y)| \leq 1 \cdot \rho(x,y)$$

Ορισμός: Έστω (X,ρ) μ.χ. και $G \subseteq X$. Το G λέγεται <u>ανοικτό</u> αν για κάθε $x_0 \in G$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x_0,\varepsilon) \subseteq G$